

# MATEMATIKA

ZA PRIJAMNE ISPITE

Arhitektura

Kemija

FSB

Farmacija

Tehnologija

FOI

RGN

PMF

Ekonomija

ETF

Građevina

Promet

B  
R  
A  
N  
K  
O  
  
T  
O  
P  
I  
Ć

ZBIRKA POTPUNO  
RIJEŠENIH ZADATAKA

## PREDGOVOR

Ova je zbirka riješenih zadataka namijenjena učenicima IV. razreda svih četverogodišnjih škola, ali će dobro poslužiti i učenicima ostalih razreda.

U zbirci su riješeni zadaci s prijamnih ispita na većini fakulteta i viših škola u Republici Hrvatskoj. Riješeni su se zadaci pojavljivali na ispitima od 1991. do 2004. godine. Nadam se da će takva zbirka pripomoći pripravi učenika za polaganje prijamnih ispita, a učenicima gimnazija koristit će i kod priprave za matematiku na maturi.

Učenicima preporučujem da sami pokušaju riješiti zadatak i da tek nakon dužeg neuspješnog promišljanja pogledaju rješenje. Na kraju zbirke je nekoliko originalnih testova za provjeru uspješnosti svladavanja gradiva izloženog u zbirci. Uza svaki zadatak navedeni su i fakulteti gdje su se zadaci pojavljivali u identičnom ili sličnom obliku.

Premda je zbirka prošla višestruku provjeru, sigurno će biti i pogrešaka. Svima koji ih uoče i upozore na to, bit ću zahvalan i u sljedećem će izdanju to biti ispravljeno.

I na kraju zahvaljujem uredniku, lektoru, recenzentima i svima koji su pripomogli pojavi ove zbirke.

U Varaždinu, prosinca 2004.

Branko Topić

# Sadržaj

## Zadaci

1. Algebarski izrazi .....	9	115
2. Problemi .....	16	130
3. Linearne jednadžbe i nejednadžbe s jednom nepoznanicom .....	20	137
4. Zadaci s apsolutnom vrijednošću .....	23	147
5. Polinomi .....	26	157
6. Sustavi jednadžbi .....	28	162
7. Kompleksni brojevi .....	29	164
8. Kvadratne jednadžbe s primjenama .....	33	172
9. Kvadratne funkcije .....	36	179
10. Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe .....	38	183
11. Eksponecijalne i logaritamske funkcije .....	39	185
12. Trigonometrijske relacije, jednadžbe i nejednadžbe .....	45	202
13. Nizovi i redovi .....	50	214
14. Kombinatorika - vjerojatnost .....	52	218
15. Funkcije .....	55	223
16. Planimetrija .....	59	232
16.1. Trokuti .....	63	232
16.2. Četverokuti .....	71	243
16.3. Mnogokuti .....	76	251
16.4. Krug, kružnica, dijelovi kruga .....	78	253
17. Stereometrija .....	82	256
17.1. Uglata tijela .....	82	256
17.2. Obla tijela .....	88	262
17.3. Upisana, opisana i rotacijska tijela .....	93	268
18. Analitička geometrija ravnine .....	95	271
18.1. Pravac .....	95	271
18.2. Kružnica, Elipsa, Hiperbola, Parabola .....	99	277
19. Vektori .....	106	288
20. A sada, svega pomalo .....	108	290
21. Testovi .....	298	304

## Popis fakulteta s kraticama

1. **ETF** ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET (**FER**)
2. **FSB** FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
3. **PMF** PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET  
STRUKE – MATEMATIKA I FIZIKA
4. **K** PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET  
STRUKA – KEMIJA
5. **T** FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
TEKSTILNO – TEHNOLOŠKI FAKULTET
6. **F** FARMACEUTSKO – BIOKEMIJSKI FAKULTET
7. **A** ARHITEKTONSKI FAKULTET
8. **G** GRAĐEVINSKI FAKULTET
9. **RGN** RUDARSKO – GEOLOŠKO – NAFTNI FAKULTET
10. **BT** PREHRAMBENO – BIOTEHNOLOŠKI FAKULTET
11. **E** EKONOMSKI FAKULTET  
HOTELIJERSKO – TURISTIČKI FAKULTET
12. **P** FAKULTET PROMETNIH ZNANOSTI
13. **FOI** FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

- 44.<sup>G</sup> Nađite zbroj rješenja jednačbe  $|\sin 2x| + |\cos x| = 0$  u intervalu  $[0, 2\pi]$ .
- 45.<sup>PMF</sup> Koliko korijena ima jednačba  $\sin|2x - \pi| = 1$  u intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ ?
- 46.<sup>K</sup> Ako je  $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{3}$  i  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , koliko je  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2}$ .
- 47.<sup>ETF</sup> U nekom kosokutnom trokutu s kutovima  $\alpha, \beta, \gamma$  je  $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 7 : 8 : 9$ . Izračunajte  $\cos \beta$ !
- 48.<sup>BT</sup> Ako je  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4$ , koliko je  $\frac{6 \sin x - 7 \cos x + 1}{8 \sin x + 9 \cos x - 1}$ ?
- 49.<sup>PMF</sup> Nađi maksimum funkcije  $f(x) = 2 + 2 \cos x - \sin^2 x$ !
- 50.<sup>FSB</sup> Koliki je osnovni period funkcije  $y = \sin 2x + \cos^2 x$ ?
- 51.<sup>PMF</sup> Za koju vrijednost realnog parametra  $a$  jednačba  $\cos \frac{x}{2} = a$  ima paran broj korijena u intervalu  $\langle -2\pi, 4\pi \rangle$ ?
- 52.<sup>PMF</sup> Ako je  $\sin \alpha + \cos \beta = m$  i  $\cos \alpha - \cos \beta = n$  koliko je  $\sin 2\alpha$ ?
- 53.<sup>PMF</sup> Nađi broj realnih korijena jednačbe  $|\sin x| + \sin|x| = 2 - \frac{1}{8}x^2$ !
- 54.<sup>PMF</sup> Nađi najmanji  $a$  za koji jednačba  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a$  ima rješenje.
- 55.<sup>FER</sup> Pojednostavni  $\frac{(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2 - \cos^2 x} \cdot \left( \frac{1 + \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^{-1}$ .
- 56.<sup>FER</sup> Nađi broj rješenja jednačbe  $|\sin 3x| = |\cos 3x|$  u intervalu  $[0, 2\pi]$ .
- 57.<sup>PMF</sup> Nađi temeljni period funkcije  $f(x) = |\cos 2x| - 1$ .
- 58.<sup>FER</sup> Koliki je zbroj rješenja jednačbe:
- a)  $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{8}$  u intervalu  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{6\pi}{5}\right]$ ;
- b)  $\log_3(\operatorname{tg} 3x) = 0.5$  u intervalu  $[0, \pi]$ ?
- 59.<sup>PMF</sup> Nađi vrijednost izraza  $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ$ !

$$45. \text{PMF} \quad |2x - \pi| = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$a) \quad 2x - \pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Big| :2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Lako se pokaže da je samo  $x = \frac{3\pi}{4}$  rješenje ( $k = 0$ ).

$$b) \quad -2x + \pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Jedina su rješenja za  $k = 0$  i  $k = -1$ .

Postoje ukupno 3 rješenja.

$$46. \text{K} \quad \text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} &= \frac{1}{2} \cdot (\cos 3x + \cos 2x) = \frac{1}{2} \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{27}{125} - \frac{9}{5} + \frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{108 - 225 + 45 - 80}{125}\right) = -\frac{152}{2 \cdot 125} = -\frac{76}{125}. \end{aligned}$$

47. <sup>ETF</sup> Iz sinusnog poučka sledi  $a : b : c = 7 : 8 : 9$ , a iz kosinusnog poučka i relacija

$$a = \frac{7}{8}b, \quad c = \frac{9}{8}b \text{ dobije se } \cos \beta = \frac{11}{21}.$$

48. <sup>BT</sup> Iz univerzalne supstitucije  $\text{tg} \frac{x}{2} = t$  sledi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{8}{17}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-16}{1+16} = -\frac{15}{17}$$

$$\text{i konačno } \frac{\frac{48}{17} + \frac{105}{17} + 1}{\frac{64}{17} - \frac{135}{17} - 1} = \frac{\frac{170}{17}}{\frac{-88}{17}} = -\frac{85}{44}.$$

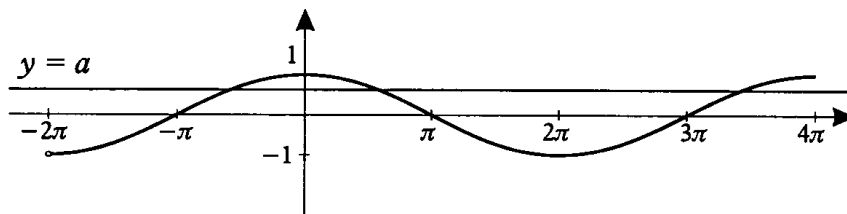
$$49. \text{PMF} \quad f(x) = 2 + 2\cos x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x + 2\cos x + 1 = (1 + \cos x)^2$$

$$f_{\max} = 4 \quad (\text{za } \cos x = 1).$$

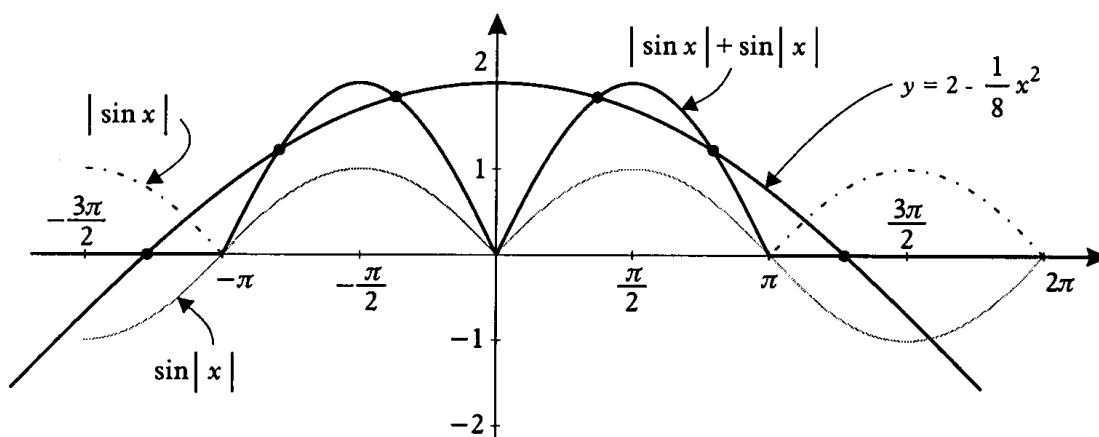
50. <sup>FSB</sup>  $y = \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2}$ . Periodi funkcija  $\sin 2x$  i  $\cos 2x$  su  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , pa je osnovni period  $\pi$ !

52. <sup>PMF</sup> Zbrojimo li jednačbe dobivamo  $\sin \alpha + \cos \alpha = m + n$ . Kvadriranjem bismo dobili  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = (m + n)^2$ , odnosno  $1 + \sin 2\alpha = (m + n)^2$  i konačno  $\sin 2\alpha = (m + n)^2 - 1$ !

51. <sup>PMF</sup> Iz grafa funkcije  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  (period  $4\pi$ ) vidimo da je to  $a = 1$  jer onda postoje 2 rješenja. Za  $a = -1$  imamo jedno ( $2\pi$ ) jer za  $-2\pi$  funkcija nije definirana!



53. <sup>PMF</sup> Narišimo grafove funkcija:



Vidimo da se sijeku u 6 točaka, pa je toliko rješenja.

54. <sup>PMF</sup>  $\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = a$  (zbog toga što je lijeva strana pozitivna mora biti  $a \geq 0$ )

$$\text{tg}^2 x + \frac{1}{\text{tg}^2 x} = a \cdot \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^4 x - a \text{tg}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |a| \geq 2 \begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq -2 \end{cases} \text{ (zbog } a \geq 0) \Rightarrow a_{\min} = 2!$$

$$\begin{aligned} 55. \text{ FER } & \frac{1 - 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{1 - 2 \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} \cdot \left( \frac{1 + 2 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} \right)^{-1} = \\ & = \frac{2 - 2 \sin x}{\cancel{\sin^2 x} + \cancel{\cos^2 x} - 2 \sin x + \cancel{\sin^2 x} - \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\sin^2 x} + \cancel{\cos^2 x} + 2 \cos x + \cancel{\cos^2 x} - \cancel{\sin^2 x}} \cdot \frac{\sin x \cdot (1 + \cos x)}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} = \\ & = \frac{2 \cdot (1 - \sin x)}{2 \sin x \cdot (\sin x - 1)} \cdot \frac{\sin x \cdot (1 + \cos x)}{2 \cos x \cdot (1 + \cos x)} = -\frac{1}{2 \cos x} = -\frac{\sec x}{2} \quad (\sec x - \text{sekans } x)! \end{aligned}$$

32. <sup>ETF</sup> Ako je  $f(x) = \frac{ax+2}{2x+a}$  i  $f(1)+f(2)=4$ , koliko je  $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)$ ?
33. <sup>FSB</sup><sub>ETF</sub>  $f(x) = \frac{1}{x} + 7$ ,  $g(x) = \frac{x}{1-7x}$ . Nađite  $f(g(x+1))$ .
34. <sup>PMF</sup> Ako je  $f(x+\pi) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos(2\pi-x)$ , nađite  $f\left(\frac{35\pi}{3}\right)$ .
35. <sup>PMF</sup> Ako je  $f(x-2\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2 \cdot \sin(x-\pi)$ , koliko je  $f\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$ ?
36. <sup>G</sup> Ako je  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ ,  $g(x) = 2 \cdot \ln x$ , koliko je  $(g \circ f)(t)$ ?
37. <sup>E</sup> Ako je  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , izračunajte  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ .
38. <sup>E</sup> Nađite domenu realne funkcije  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1-x)}$ .
39. <sup>PMF</sup> Nađite kodomenu funkcije  $y = |1-x| - |2+x|$ .
40. <sup>PMF</sup> Nađite inverznu funkciju funkcije  $y = \log_2 x + \log_4 x$ .
41. <sup>FSB</sup> Za funkcije  $f(x) = x^3 - 1$  i  $g(x) = x \cdot (x+1) + 1$  izračunajte  $(f^{-1} \circ g)(2)$ !
42. <sup>ETF</sup> Za  $f(x) = \frac{1-x}{x}$  i  $g(x) = x + \frac{1}{x}$  izračunajte  $f^{-1}\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ !
43. <sup>PMF</sup> Nađi sve realne brojeve  $a$  za koje se grafovi funkcija  $y = 2ax + 1$  i  $y = (a-6) \cdot x^2 - 2$  ne sijeku.
44. <sup>E</sup> Ako je  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ , izračunajte  $f(\sqrt{3} - 2)$ !
45. <sup>E</sup> Nađi kodomenu funkcije  $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 5$ !
46. <sup>E</sup> Pojednostavni funkciju  $f(x) = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) + 1$ !
47. <sup>E</sup> Za koje realne brojeve funkcija  $f(x) = 2^{-x^2+2} - 2$  poprima samo pozitivne vrijednosti?
48. <sup>E</sup> Ako je  $f^{-1}(x+1) = \frac{3x+6}{1-x}$ , koliko je  $f(1)$ ?
49. <sup>E</sup> Ako je  $f(x) = \frac{2x-3}{3+x}$ , koliko je  $f^{-1}(3)$ ?
50. <sup>E</sup> Ako je  $f(2x+1) = (4x+3)^{-1}$ , a  $f^{-1}(x)$  inverzna funkcija od  $f(x)$ , nađi  $f^{-1}(3)$ !